

Teisendused

Analüütiline geomeetria 3D Modelleerimise ja
visualiseerimise erialale

Mis on teisendus

- Teisendus on matemaatikas suvaline funktsioon, mis teisendab ühe vektori teiseks.
- Analüütilises geomeetrias pakuvad meile huvi afiinsed teisendused, eelkõige pööre, nihe ja skaala ning lisaks mitteafiinne projektsioonteisendus.
- Afiinne teisendus jätab sirge sirgeks ja säilitab samal sirgel asetsevate lõikude pikkuse suhte.
- Vektori (punkti või suuna) koordinaadid ruumis on alati määratud mingi koordinaatsüsteemi suhtes.
- Afiinset teisendust saab kirjeldada koordinaatsüsteemina.
- Nagu koordinaatsüsteemi, kirjeldatakse ka teisendust üldjuhul 4×4 maatriksina

Teisendus kui lokaalne koordinaatsüsteem

- Me võime objekti "sisemiseks", "oma-" või "baaspaigutuseks" lugeda sellist paigutust, kus tema lokaalne ja globaalne koordinaatsüsteem langevad kokku.
- Blenderis Alt+G, Alt+R, Alt+S algväärtustab objekti lokaalse koordinaatsüsteemi
- Kui me nüüd objekti teisendame – objektirežiimis nihutame, pöörame või skaleerime, muutub tema lokaalse koordinaatsüsteemi asend globaalse suhtes.
- Objekt ise – s.t. tema võre – jääb muutumatuks.
- Objekti lokaalne koordinaatsüsteem kirjeldab täielikult temaga teostatud suvalise arvu põhiteisenduste – nihke, pöörde ja skaala kombinatsiooni.

Teisenduse komponendid

- Nihe – kirjeldab objekti alguspunkti (origin) – s.t. tema lokaalse koordinaatsüsteemi nullpunkti asukoha muutust.
 - Rakendades objektile järjest suvalise arvu nihketeisendusi, on summarne teisendus alati samuti nihketeisendus.
 - Kui esialgne koordinaatsüsteem on ortonormeeritud, on seda ka nihketeisenduse tulemus.
 - Nihet kirjeldab 4x4 maatriks, mis erineb ühikmaatriksist ainult viimase veeru kolme ülemise liikme poolest.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & N_x \\ 0 & 1 & 0 & N_y \\ 0 & 0 & 1 & N_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nihke esitus 4x4 maatriksina

Teisenduse komponendid

- Pööre kirjeldab objekti pööret mingi nurga võrra ümber tema lokaalse koordinaatsüsteemi nullpunkti läbiva telje 3D ruumis
 - Rakendades objektile järjest suvalise arvu pöördeteisendusi, on summarne teisendus alati samuti pöördeteisendus.
 - Kui esialgne koordinaatsüsteem on ortonormeeritud, on seda ka pöördeteisenduse tulemus.
 - Pööret kirjeldab täielikult 3x3 maatriks või 4x4 maatriks, mis erineb ühikmaatriksist ainult ülemise vasaku 3x3 alammaatriksi osas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pöörde esitus 4x4 maatriksina

Teisenduse komponendid

- Skaala kirjeldab objekti mõõtmete muutust tema lokaalse koordinaatsüsteemi telgede suunas
 - Rakendades objektile järjest suvalise arvu skaalateisendusi, on summarne teisendus alati samuti skaalateisendus.
 - Skaalateisendus (skaleerimine) ei säilita koordinaatsüsteemi ortonormeeritust, säilitab aga ortogonaalsuse
 - Skaalateisenduse 4x4 maatriks erineb ühikmaatriksist ainult kolme peadiagonaali elemendi osas.

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Skaala esitus 4x4 maatriksina

Teisenduste kombinatsioon

- Kui me teeme objektile järjest suvalise arvu elementaarteisendusi (nihkeid, pööordeid ja skaleerimisi), siis tema summaarne teisendus on alati lahutatav kolme elementaarteisenduse kombinatsiooniks.
- Sealjuures, kui me näiteks objekti ainult nihutame ja pöörame – kuitahes palju arv kordi, siis on ka tema summarse teisenduse skaalakomponent identsus (skaala 1).
- Sama kehtib ka teiste elementaarteisenduste suhtes.
- Kui me kujutame teisendusi maatriksitena, siis summaarne teisendus on nende korrutis:

$$M = M_{nihe} \times M_{pööre} \times M_{skaala}$$

- See kirjeldab juhtu, kui me objekti kõigepealt nihutame, siis pöörame ja siis skaleerime
- Teisenduste järjekord on oluline!

Teisenduste esitamine

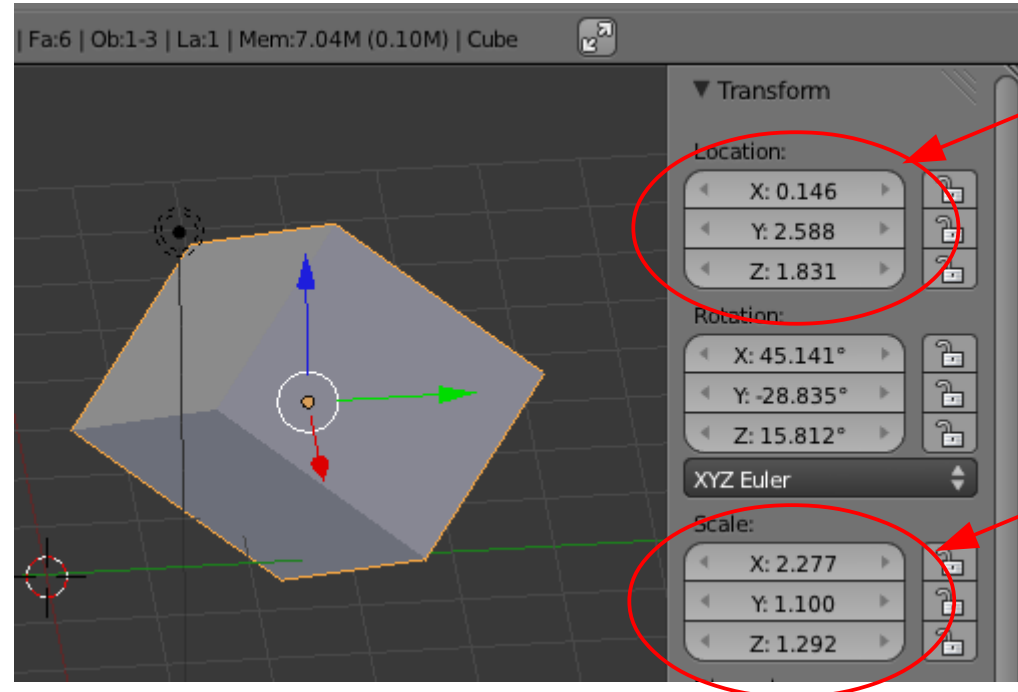
- Teisenduse üldjuhtu esitab 4x4 maatriks
- See on ebaülevaatlik...

$$M = \begin{bmatrix} A_x & B_x & C_x & O_x \\ A_y & B_y & C_y & O_y \\ A_z & B_z & C_z & O_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Me küll teame, et maatriks esitab lokaalse koordinaatsüsteemi baasvektoreid ning alguspunkti, kuidas aga näiteks sealt pööret välja lugeda?
- Seepärast esitavad 3D programmid teisendusi geomeetriliselt arusaadavate elementaarteisenduste abil

Nihke ja skaala esitamine

- Nihe esitatakse vektorina, mis kirjeldab lokaalse koordinaatsüsteemi alguspunkti asukohta globaalses koordinaatsüsteemis
- Skaala esitatakse kolme osaskaalana, mis määravad vastavate lokaalse koordinaatsüsteemi baasvektorite pikkused globaalses koordinaatsüsteemis



Nihe

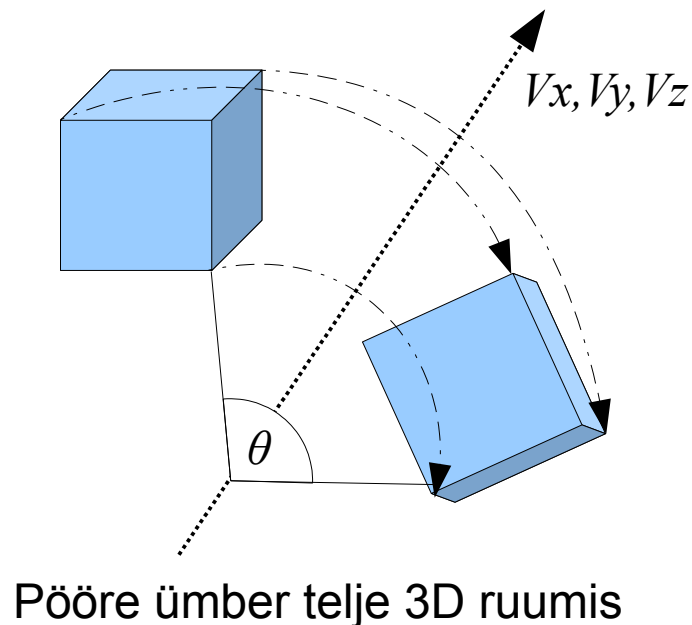
Skaala

Pöörde esitamine

- Pöörde esitamiseks on mitu võimalust
- Pöördemaatriks
 - Pööret kirjeldab täielikult 3×3 ortonormeeritud maatriks
 - Iga 3×3 ortonormeeritud maatriks kirjeldab ühte pööret või pöörde ja peegelduse kombinatsiooni
- Telg ja pöördenurk
- Kvaternioon
- Euleri nurgad
- See, millist meetodit kasutatakse (nii kasutajaliideses kui programmisiseselt) sõltub ülesandest.
- Programid kasutavad arvutustes põhiliselt maatrikseid, kuid näiteks animatsioonide ja pöördkinemaatika puhul ka Euleri nurki ja kvaternioone

Pöörlemistelg ja pöördenurk

- Iga pöörde ruumis saab esitada pöörmistelje ja pöördenurga kaudu
- Pöörlemistelg läbib objekti lokaalse koordinaatsüsteemi nullpunkti
- Vaadates telje positiivse suuna poolt nullpunkti poole, loetakse vastupäeva pööret positiivseks nurgaks.



Kvaternioon

- Kvaternioon on neljast arvust koosnev matemaatiline objekt

$$Q = (Q_x, Q_y, Q_z, Q_w)$$

- Kvaternioon ja vektor on erinevad asjad!
- Kvaterniooni võib mõista kui sobivalt normaliseeritud pöörlemistelje ja pöördenurga kombinatsiooni
- Kvaterniooni kolm esimest komponenti (Q_x, Q_y, Q_z) määravad skaleeritud pöörlemistelje
- Q_w on poole pöördenurga koosinus

$$Q_w = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

- Kvaternioon on üldjuhul normaliseeritud nii, et

$$Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2 + Q_w^2 = 1$$

Kvaternioon

- Kvaternioone kasutatakse palju animatsioonis – eelkõige seetõttu, et neid on lihtne interpoleerida
- Interpolatsioon on vahepealsete asendite või pooside leidmine võtmekaadrite vahel
- Nihke ja skaala jaoks on see lihtne – kuidas aga interpoleerida pöördeid?
- Kvaternioone saab interpoleerida nagu neljadimensioonilisi vektoreid.
- Sel juhul on interpoleeritud pööre sujuv

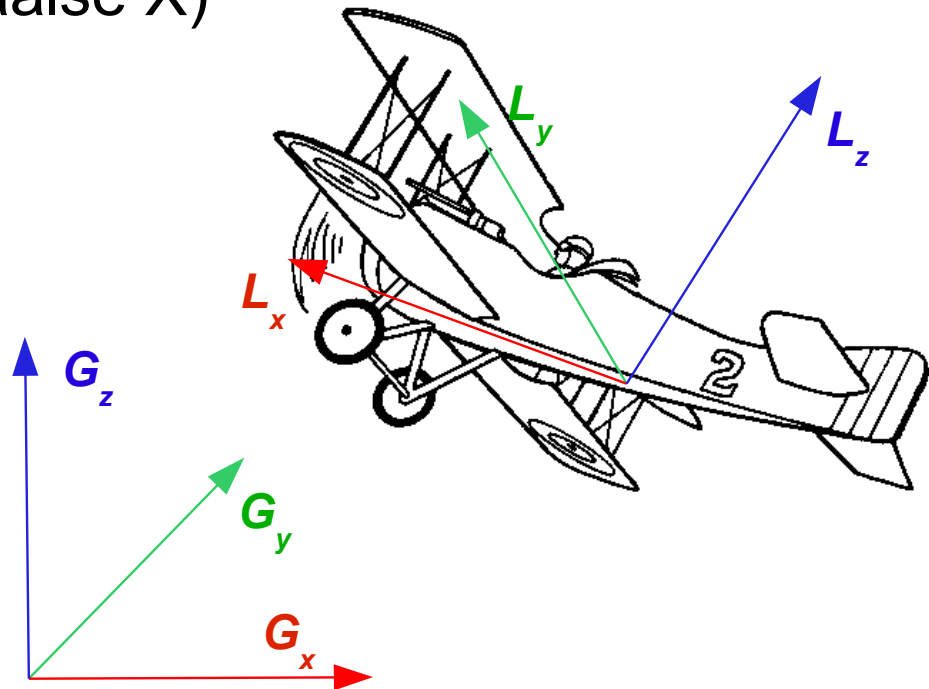
Euleri nurgad

- Suvalise pöörde saab alati jagada kolmeks elementaarpöördeks – ümber lokaalse koordinaatsüsteemi X, Y ja Z telgede.
- Maatrikskujul: $M_{pööre} = M_x \times M_y \times M_z$
- Võimalikud on ka teised lokaalsete ja globaalsete telgede kombinatsioonid – näiteks Xyx, YzX jne...
- Pöörete tegemise järjekord on oluline!
- Euleri nurgad ei ole üheselt määratud – näiteks 90 kraadist pööret kirjeldab lõpmata palju erinevaid Euleri nurkade kombinatsioone
- Seetõttu ei sobi Euleri nurgad hästi interpoleerimiseks – puudub mõistlik algoritm, mille alusel sobivaim variant välja valida.
- Kasutatakse animatsioonis, sest nende abil on lihtne anda ette piiranguid

Euleri nurgad

- Euleri nurki võib ette kujutada lennuki näitel
- Lennuki asendi määravad:
 - Suund (pööre ümber globaalse Z)
 - Tõus (pööre ümber lokaalse Y)
 - Kalle (pööre ümber lokaalse X)
- Selles järjekorras
- Ehk:

$$M_{pööre} = M_z \times M_y \times M_x$$



Koju kaasa

- Teisendus on määratud kohaliku koordinaatsüsteemiga
- 3D geomeetrias kasutatakse kolme põhiteisendust – nihet, pööret ja skaleerimist
- Suvalise arvu nende põhiteisenduste summa saab alati lahutada nendeks kolmeks
- Kui üksikuid teisendusi kirjeldada maatriksitega, kirjeldab summarset teisendust nende korrutis
- Pööret saab esitada pöörlemistelje ja pöördenurga või euleri nurkade abil